talché

Dunque l'equazione del piano corrispondente al piano focale del punto («', *p', q',* r'), la .quale sarebbe

dA' ... dA' da' . 3 A'

equivale alla (13), che rappresenta appunto il piano focale del punto *(n, p, q,* r).

Poiché la relazione sussistente fra i piani (13) e (14) è, rispetto alla cubica, di natura reciproca, riesce manifesto *a priori* che le proprietà polari testé riconosciute in essi relativamente all'iperboloide *H* = o, che corrisponde al fuoco del primo, devono verificarsi eziandio rispetto a quell'altro iperboloide *H'* = o, che corrisponde al fuoco del secondo, cioè che contiene le tre tangenti della cubica nei punti comuni a questa ed al secondo piano. Dunque il punto *(n,p,* 9, r) col piano (13), ed il punto *(n',p'₉ q',r'}* col piano (14), formano due sistemi reciproci tanto rispetto alla cubica, quanto rispetto alla sua svilupparle osculatrice, quanto rispetto ai due iperboloidi menzionati.

Esaminando le forinole date dal prof. CREMONA nell'art. 5 delle sue ricerche *Sulle linee del ter^' ordine a doppia curvatura* *), si vede che i due piani (13) e (14) sono fra loro *congiunti* rispetto alla cubica; laonde, combinando le proprietà ritrovate dal medesimo autore con quelle che risultano da quanto precede, si giunge a nuove proprietà delle figure congiunte (fra le quali figure si potrebbero annoverare anche i due iperboloidi testé considerati).

Per esempio, si può osservare che, siccome la conica secondo cui un piano osculatore è segato dalla svilupparle osculatrice passa per il punto di osculazione ed ha ivi la stessa tangente della cubica, così i tre poli di un piano qualunque rispetto alle coniche esistenti nei piani osculatori dei suoi tre punti d'intersezione colla cubica, sono i punti d'incontro delle tangenti alla cubica in questi stessi punti col piano congiunto al dato. Questi poli esistono dunque sui lati del triangolo secondo cui il piano congiunto è segato dai piani osculatori passanti per il fuoco del piano primitivo. Ma, per un teorema del signor CREMONA, la conica congiunta deve toccare in questi punti i lati del detto triangolo : dunque essa coincide colla conica secondo cui il piano congiunto sega l'iperboloide corrispondente al fuoco del piano primitivo, conica che vedemmo già essere inscritta in quel triangolo. Si ha quindi il teorema : *la conica congiunta ad un dato piano*

*) Annali di Matematica pura ed applicata, t. II (1859), pag. 22.